Comme $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7, nous en déduisons que, pour tout entier naturel n, $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7.

Nous avons : $2^{3n+2} - 4 = 4(2^{3n} - 1)$

Comme $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7, nous en déduisons que, pour tout entier naturel n, $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

2-Nous avons, en utilisant les résultats de la question précédente

$2^{3n} - 1 = 7k$, avec k entier naturel, donc $2^{3n} = 7k + 1$

$2^{3n+1} - 2 = 7k'$ donc $2^{3n+1} = 7k' + 2$;

$2^{3n+2} - 4 = 7k''$ donc $2^{3n+2} - 7k'' + 4$.

Or tout entier naturel s'écrit sous l'une des formes 3n, 3n + 1, 3n + 2.

Nous en déduisons que les restes possibles de la division par 7 des puissances de 2 sont 1 ; 2 et 4.

3. a) Nous avons $A_{3n} = 2^{3n} + 2^{6n} + 2^{9n}$. Chacun des exposants 3n, 6n et 9n étant un multiple de 3, les restes des divisions de 2^{3n} ; 2^{6n} ; 2^{9n} par 7 sont a chaque fois égaux à 1 donc le reste de la division de A_p par 7 est, dans le cas p = 3n, égal à 3.

Nous avons $A_{3n+1} = 2^{3n+1} + 2^{6n+2} + 2^{9n+3}$. Or le reste de la division de 2^{3n+1} par 7 est. 2, le reste de la division de 2^{6n+2} est 4 (Puisque 6n + 2 est. un multiple de 3 auquel on ajoute 2) et le reste de la division de 2^{9n+3} par 7 est 1 (puisque 9n + 3 est un multiple de 3). Le reste de la division de :

$A_{3n+1} = 2^{3n+1} + 2^{6n+2} + 2^{9n+3}$ est donc nul, car la somme des restes des divisions de chacun des termes de cette somme donne 7.Le nombre A_p, dans le cas p = 3n + 1, est divisible par 7.

Nous avons : $A_{3n+2} = 2^{3n+2} + 2^{6n+4} + 2^{9n+6}$.

Le reste de la division par 7 de 2^{3n+2} est 4.

Le reste de la division par 7 de $2^{6n+4} = 2^{3(n+1)+1}$ est 2.

Le reste de la division par 7 de $2^{9n+6} = 2^{3(3n+2)}$ est 1.

Qarray.tn - Nora Blech- Qarray.tn